

Ejercicios - Tema 1

Números Reales, Complejos. Sucesiones numéricas

1.1 Inducción

Ejercicio 1.1.1. Demuestra por inducción:

$$\begin{array}{ll} \text{i)} & 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{ii)} \quad 1 + 3 + \dots + (2n-1) = n^2 \\ \text{iii)} & 4(1 + 5 + 5^2 \dots + 5^n) + 1 = 5^{n+1} \quad \text{iv)} \quad \text{Si } r \neq 1, 1 + r + r^2 + \dots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} \end{array}$$

1.2 Ejercicios con exponentes

Recuerda **las igualdades notables** y utilízalas para resolver los siguientes ejercicios.

i) **Binomio de Newton:**

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n.$$

En particular para $n = 2$:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \quad \text{y} \quad (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

$$\text{ii)} \quad a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$$

Ejercicio 1.2.1. Simplifica al máximo las expresiones

i) $(a+b)^m(a-b)^m$. Una vez obtenida la solución, desarrolla por el binomio de Newton para $m = 2$ y $m = 3$.

ii) Calcula el coeficiente de x^{20} en $(x^3 - \sqrt{x})^{10}$

$$\text{iii)} \quad \left(\frac{a+b}{c-d}\right)^3 \left(\frac{1}{a+b}\right)^2 \left(\frac{c-d}{a+b}\right)^4 \quad \text{iv)} \quad \frac{(2ab)^5(3ab)^2(5a)^4}{(3b)^3(4ab)^6}$$

$$\text{v)} \quad \frac{a + \sqrt{b}}{a - \sqrt{b}} + \frac{a - \sqrt{b}}{a + \sqrt{b}} \quad \text{vi)} \quad \sqrt[3]{a^3x^4(a^4 + a^3x)^2}$$

1.3 Resolución de ecuaciones

Ejercicio 1.3.1. Resuelve las siguientes ecuaciones

$$\begin{array}{lll} \text{i)} & (2x-3)^2 - 9 = 8x & \text{ii)} \quad \frac{9}{x} - \frac{x}{3} = 2 \quad \text{iii)} \quad \frac{7}{x-2} + \frac{8}{x-5} = 3 \\ \text{iv)} & \sqrt{x^2+1} = x-10 & \text{v)} \quad \sqrt{x^2+1} = x^2-5 \quad \text{vi)} \quad \sqrt{x+5} + \sqrt{2x+8} = 7 \end{array}$$

1.4 Resolución de inecuaciones

Ejercicio 1.4.1. Resuelve las siguientes desigualdades

$$\begin{array}{lll} \text{i)} & -5(2-x) \leq 15 & \text{ii)} \quad x^2 - 1 < 0 \quad \text{iii)} \quad (x-2)^2 > 0 \\ \text{iv)} & x^3(x-2)(x+3)^2 > 0 & \text{v)} \quad \frac{1}{x-3} < 2 \quad \text{vi)} \quad \frac{1}{1+x^2} < 1 \end{array}$$

1.5 Valor absoluto

Ejercicio 1.5.1. Resuelve las siguientes desigualdades

$$\begin{array}{lll} \text{i)} & |x| < 1 & \text{ii)} \quad |3x+1| \geq 1 \quad \text{iii)} \quad |x^2-x| > 2 \\ \text{iv)} & |x+4| < 2 & \text{v)} \quad |x+1| < |x-3| \quad \text{vi)} \quad |x-1| |x+2| \leq 4 \end{array}$$

1.6 Conjuntos acotados, Supremo, ínfimo, máximo y mínimo

Ejercicio 1.6.1. Representa en la recta real los siguientes conjuntos indicando si son acotados y si tienen máximo, mínimo, supremo, ínfimo.

$$\begin{array}{ll} \text{i)} & A = \{(-1)^n(1 + \frac{1}{n}) \mid n \in \mathbb{N}\} \quad \text{ii)} \quad B = [0, 1] \setminus \{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \\ \text{iii)} & C = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\} \quad \text{iv)} \quad D = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x - 1 < 0\} \end{array}$$

1.7 Números complejos

Ejercicio 1.7.1. Expresa en forma polar y exponencial:

$$\text{i)} \quad 3+3i \quad \text{ii)} \quad -1+\sqrt{3}i \quad \text{iii)} \quad -1 \quad \text{iv)} \quad -2-2\sqrt{3}i$$

Ejercicio 1.7.2. Expresa en forma binómica:

$$\text{i)} \quad 1_{\frac{\pi}{2}} \quad \text{ii)} \quad 2_0 \quad \text{iii)} \quad 1_{\pi} \quad \text{iv)} \quad 2_{\frac{\pi}{4}} \quad \text{v)} \quad 3e^{-\frac{\pi}{2}} \quad \text{vi)} \quad 2e^{\pi} \quad \text{vii)} \quad e^{\frac{\pi}{3}} \quad \text{viii)} \quad 5e^{-\frac{\pi}{4}}$$

Ejercicio 1.7.3. Calcula:

$$\begin{array}{lll} \text{i)} & (3) + (1+i) & \text{ii)} \quad (4-2i) + (-6+5i) \quad \text{iii)} \quad (2-i) - (1-i) \\ \text{iv)} & (3-i)(1+i) & \text{v)} \quad (1+i)(2-i)(1-i) \quad \text{vi)} \quad (1+i)^2 \\ \text{vii)} & \frac{3-i}{1+i} & \text{viii)} \quad i+i^2+i^3+i^4+i^5 \quad \text{ix)} \quad \frac{1+i}{(1-i)^2} \\ \text{x)} & 3_{\frac{\pi}{2}} 2_{\frac{\pi}{4}} & \text{xi)} \quad \frac{3_{\frac{\pi}{2}}}{2_{\frac{\pi}{4}}} \quad \text{xii)} \quad (3_{\frac{\pi}{5}})^3 \end{array}$$

Ejercicio 1.7.4. Representa en el plano complejo las regiones cuyos puntos satisfacen las siguientes ecuaciones.

$$\begin{array}{lll} \text{i)} & |z-1+i| \geq R & \text{ii)} \quad |z-2| + |z+2| = 5 \quad \text{iii)} \quad |z-2| - |z+2| = 3 \\ \text{iv)} & |z-z_1| = |z-z_2| & \text{v)} \quad 0 < \Re(iz) < 1 \quad \text{vi)} \quad |z| = \Re(z) + 1 \end{array}$$

Ejercicio 1.7.5. Halla todos los valores de las siguientes raíces.

$$\text{i)} \quad \sqrt[3]{1} \quad \text{ii)} \quad \sqrt[3]{i} \quad \text{iii)} \quad \sqrt{-1} \quad \text{iv)} \quad \sqrt{1-i} \quad \text{v)} \quad \sqrt[3]{1+i} \quad \text{vi)} \quad \sqrt[4]{-1}$$

1.8 Sucesiones. Potencia

Ejercicio 1.8.1. Calcula los siguientes límites.

$$\begin{array}{lll} \text{i)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{5}{3}\right)^n & \text{ii)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^{2n} & \text{iii)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{5}\right)^{n/2} \\ \text{iv)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-2)^n + 3^n}{5^n} & \text{v)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n + 7^n}{5^n} & \text{vi)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a^2}{1+a^2}\right)^n, \quad a \in \mathbb{R} \end{array}$$

1.9 Indeterminaciones

Ejercicio 1.9.1. Calcula los siguientes límites, indicando el tipo de indeterminación que se presenta.

$$\begin{array}{ll} \text{i)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 3n - 8}{2n^2 + 7n + 1} & \text{ii)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - \pi}{n^3 + 2n - 1} \\ \text{iii)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 2n^2 + 5}{2n + 1} & \text{iv)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{5n^3}}{3n^2 + n} \\ \text{v)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^6 + n^4}}{n^2 + \sqrt{n^4 + n} + 5} & \text{vi)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^a}{n^2 + \sqrt{n^3 - 2n^2 + 5}}, \quad a \in \mathbb{R} \\ \text{vii)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n^2 + 1} - \sqrt{n^2 + 2}\right) & \text{viii)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n^2 + n} - n \\ \text{ix)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n^3 + 5} (\sqrt{8n^4 + n^3} + \sqrt{2n^2}) & \text{x)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} 3^n \frac{1}{n^5 + 2^n} \\ \text{xi)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \frac{n}{n^2 + 3^n} & \text{xii)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} \frac{1}{n} \\ \text{xiii)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2 - 1}{n^2 + 5n}\right)^{\frac{2n}{n+1}} & \text{xiv)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2 + 1}{n^2 + 3}\right)^n \\ \text{xv)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{(n^2+2)/(n-3)} & \text{xvi)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{(1+na)^2}{n^2 a^2}\right)^n, \quad a \neq 0 \\ \text{xvii)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1-n}{1-2n^2}\right)^{\frac{1}{n}} & \text{xviii)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3n+1} \\ \text{xix)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^3 + 2n - 1} & \text{xx)} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n + 5^n} \end{array}$$

1.10 Regla del sandwich

Ejercicio 1.10.1. Calcular los siguientes límites:

- i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+n)^2} \right)$
- ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n^2}{(n+1)^3} + \frac{2n^2}{(n+1/2)^3} + \cdots + \frac{2n^2}{(n+1/n)^3} \right)$
- iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{1+n^2}} + \frac{1}{\sqrt{2+n^2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n+n^2}} \right)$

1.11 Sucesiones recurrentes

Ejercicio 1.11.1. Estudia la convergencia y calcula el límite de las sucesiones recurrentes.

- i) $\begin{cases} a_1 = 1/4, \\ a_{n+1} = 1/4 + a_n^2, \quad \forall n \geq 1. \end{cases}$
- ii) $\begin{cases} a_1 = \sqrt{2}, \\ a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}, \quad \forall n \geq 1. \end{cases}$
- iii) $\begin{cases} a_1 = \frac{1}{2}, \\ a_{n+1} = \sqrt{1 + 2a_n} - 1, \quad \forall n \geq 1. \end{cases}$

1.12 Sucesiones y funciones

Ejercicio 1.12.1. Resuelve los siguientes límites

- i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \left(\frac{1}{n^2} \right)$
- ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{n} \right)$
- iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \left(\pi \frac{n^3}{2n^3 + 1} \right)$
- iv) $\lim_{n \rightarrow \infty} \arctan \left(\frac{n+1}{n} \right)$
- v) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$
- vi) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3n^3 - n^2}$

1.13 Cuestiones teóricas

Ejercicio 1.13.1. Decide si las siguientes proposiciones son ciertas. Razona la respuesta si es verdadera o busca un contraejemplo si no lo es.

- i) Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, entonces existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq N$ se tiene que $a_n > 0$.
- ii) Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$, entonces existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq N$ se tiene que $a_n > 2$.
- iii) Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a > 0$, entonces existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n \geq N$ se tiene que $a_n > 0$.